

Dynamická simulácia náhodných javov pomocou Excelu

John Andersen

Preložili: Ján Beňačka, Soňa Čeretková, Andrej Svorad, Daniel Hamran

Pochopiť zmysel základných pojmov z pravdepodobnosti a štatistiky a ich vzájomných súvislostí môže byť dosť náročný proces.

V tejto kapitole si ukážeme ako použiť Excel na simulovanie situácií, ktoré môžu prispieť k rozšíreniu našich skúseností v tejto oblasti a tým k ich lepšiemu pochopeniu.

Hádzanie mincou

Ide asi o jeden z najbežnejších náhodných experimentov na svete, hoci ľudia ho zvyčajne nepovažujú za experiment. Chápu ho tak len matematici. Väčšina ľudí vidí šance pre padnutie líca alebo rubu päťdesiat na päťdesiat. Ale čo to znamená, keď povieme, že pravdepodobnosť padnutia líca je 50 % alebo 0.5? Znamená to, že padne líce a rub vždy keď vyhodíme mincu dvakrát za sebou? Určite nie, čo môžeme ihneď zistiť, ak si to vyskúšame. Niekoľko štatistických výpočtov nám pomôže veci trochu objasniť.

Opakované hádzanie mincou a sledovanie koľkokrát padne líce môže byť veľmi poučné, a ak sme to ešte nikdy neskúšali, mali by sme tomuto experimentu venovať nasledujúcu polhodinku.

V tomto článku použijeme na simulovanie hádzania mincou Excel.

V Exceli existuje funkcia `RANDBETWEEN`, ktorá pomocou generátora náhodných čísel dokáže simulovať hádzanie mincou, ako i veľa iných náhodných experimentov.

Pozrime sa, ako pracuje a ako a čo môže pre nás urobiť.

	A
1	<code>=SLUMPMELLEM(0;1)</code>
2	

Obr. 1 Vzorec simulujúci hádzanie mincou. Dánske slovo `SLUMPMELLEM` zodpovedá anglickému `RANDBETWEEN`. Líce = 1. Rub = 0.

Ak napíšeme `RANDBETWEEN(a;b)`, dostaneme náhodne vybraté čísla z množiny $\{a, a+1, \dots, b-1, b\}$. Uvedomme si, že v rôznych jazykoch sa používajú rôzne oddeľovače – zvyčajne `;` alebo `,`

Ak napíšeme do bunky túto funkciu, dostaneme náhodne 0 alebo 1 zakaždým, keď je hárok prepočítaný, napr. keď stlačíme klávesu F9.

	A	B		A	B
1	0		1	1	
2			2		

Obr. 2 Dva výsledky stlačenia klávesu F9

Ak chceme simulovať 100 hodov mincou (alebo jeden hod so 100 mincami), môžeme to uskutočniť ľahko.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
2	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0
3	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1
4	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
5	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
6	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1
7	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1
8	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
9	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
10	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0

Obr. 3 100 hodov s našou 0/1 mincou

Môžeme skopírovať funkciu RANDBETWEEN do príslušných buniek. Každá z týchto kópií funguje nezávisle od ostatných.

	A	B	C	D	E
1	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)
2	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)
3	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)
4	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)
5	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)
6	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)
7	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)
8	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)
9	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)
10	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)	=SLUMPMELEM(0;1)
11					

Obr. 4 Nezávislé kópie funkcie SLUMPMELEM = RANDBETWEEN

V ďalšom potrebujeme spočítať koľkokrát padlo líce a koľkokrát rub. Pre tento účel použijeme funkciu COUNTIF.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0		Počet líc (1)	Počet rubov(0)
2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1		45	55
3	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1			
4	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1			
5	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0			
6	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1			
7	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0			
8	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1			
9	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0			
10	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1			

Obr. 5 Počet líc a rubov je počítaný funkciou COUNTIF a výsledok je v bunkách L2 a M2

L	M
Počet líc (1)	Počet rubov (0)
=TÆL.HVIS(\$A\$1:\$J\$10;1)	=TÆL.HVIS(\$A\$1:\$J\$10;0)

Obr. 6 Vzorce korešpondujúce s obr. 5. V dánčine sa funkcia COUNTIF nazýva TÆL.HVIS

L	M	L	M
Počet líc (1)	Počet rubov (0)	Počet líc (1)	Počet rubov (0)
56	44	50	50

Obr. 7 Stlačením F9 uskutočnime nový hod mincami

Môžeme dostať rovnaký počet líc a rubov, ale to sa bežne nestáva. Vyskúšajme a sledujme, koľkokrát sa to stane napr. pri 50 pokusoch so 100 mincami.

Môže sa stať, že by sme radi urobili dlhú sériu hodov, kde by sme sledovali, ako sa mení podiel líc s narastajúcim počtom hodov.

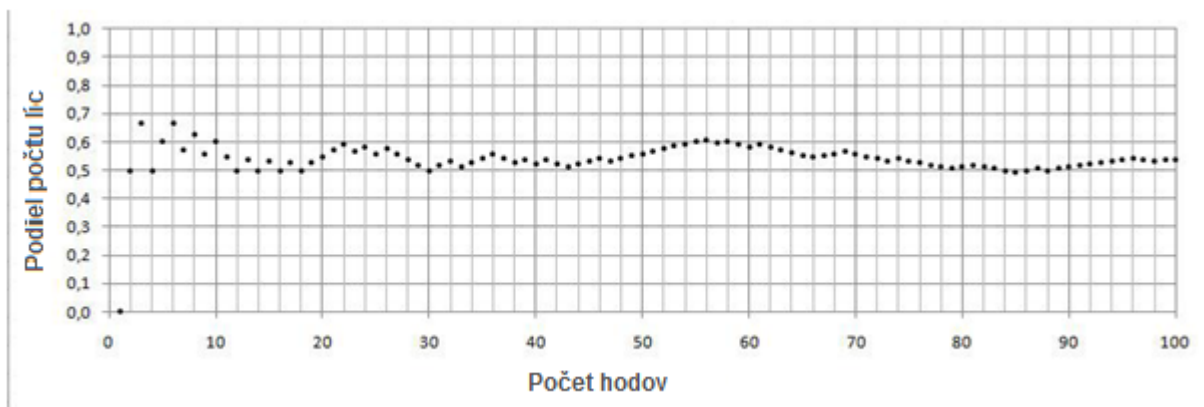
	A	B	C	D
	Číslo hodu	Strana mince	Počet líc po n hodoch	Podiel počtu líc po n hodoch
1				
2	1	1	1	1,000000
3	2	0	1	0,500000
4	3	1	2	0,666667
5	4	1	3	0,750000
6	5	1	4	0,800000
7	6	1	5	0,833333
8	7	1	6	0,857143
9	8	0	6	0,750000
10	9	0	6	0,666667
11	10	1	7	0,700000
12	11	1	8	0,727273
13	12	0	8	0,666667

Obr. 8 Kopírovaním nadol môžeme urobiť dlhú sériu hodov mincou. Vzorce pozri na obr. 9

	A	B	C	D
	Číslo hodu	Strana mince	Počet líc po n hodoch	Podiel počtu líc po n hodoch
1				
2	1	=SLUMPMELLEM(0;1)	=TÆL.HVIS(\$B\$2:B2;1)	=C2/A2
3	=A2+1	=SLUMPMELLEM(0;1)	=TÆL.HVIS(\$B\$2:B3;1)	=C3/A3
4	=A3+1	=SLUMPMELLEM(0;1)	=TÆL.HVIS(\$B\$2:B4;1)	=C4/A4
5	=A4+1	=SLUMPMELLEM(0;1)	=TÆL.HVIS(\$B\$2:B5;1)	=C5/A5
6	=A5+1	=SLUMPMELLEM(0;1)	=TÆL.HVIS(\$B\$2:B6;1)	=C6/A6
7	=A6+1	=SLUMPMELLEM(0;1)	=TÆL.HVIS(\$B\$2:B7;1)	=C7/A7
8	=A7+1	=SLUMPMELLEM(0;1)	=TÆL.HVIS(\$B\$2:B8;1)	=C8/A8
9	=A8+1	=SLUMPMELLEM(0;1)	=TÆL.HVIS(\$B\$2:B9;1)	=C9/A9
10	=A9+1	=SLUMPMELLEM(0;1)	=TÆL.HVIS(\$B\$2:B10;1)	=C10/A10
11	=A10+1	=SLUMPMELLEM(0;1)	=TÆL.HVIS(\$B\$2:B11;1)	=C11/A11
12	=A11+1	=SLUMPMELLEM(0;1)	=TÆL.HVIS(\$B\$2:B12;1)	=C12/A12
13	=A12+1	=SLUMPMELLEM(0;1)	=TÆL.HVIS(\$B\$2:B13;1)	=C13/A13

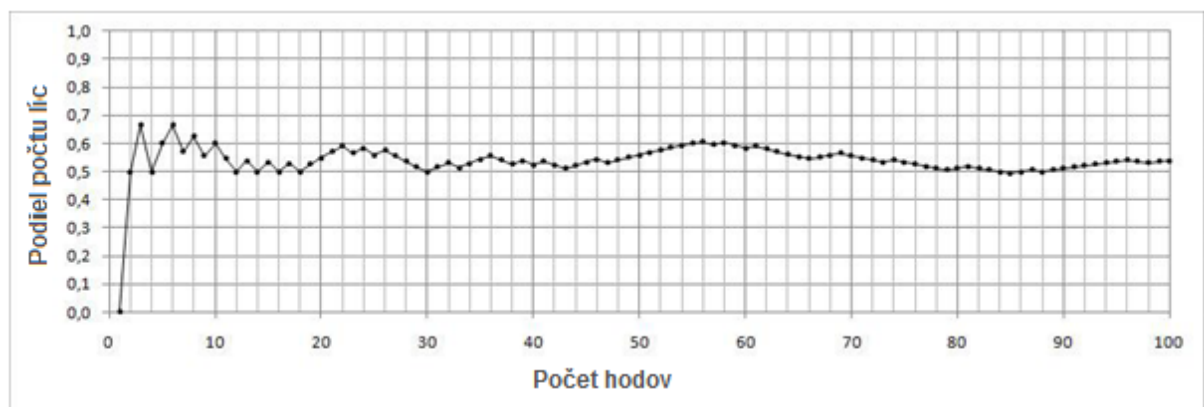
Obr. 9 Vzorce korešpondujúce s obr. 8

Dobrou grafickou interpretáciou je bodový xy graf znázorňujúci podiel líc ako funkciu počtu hodov n

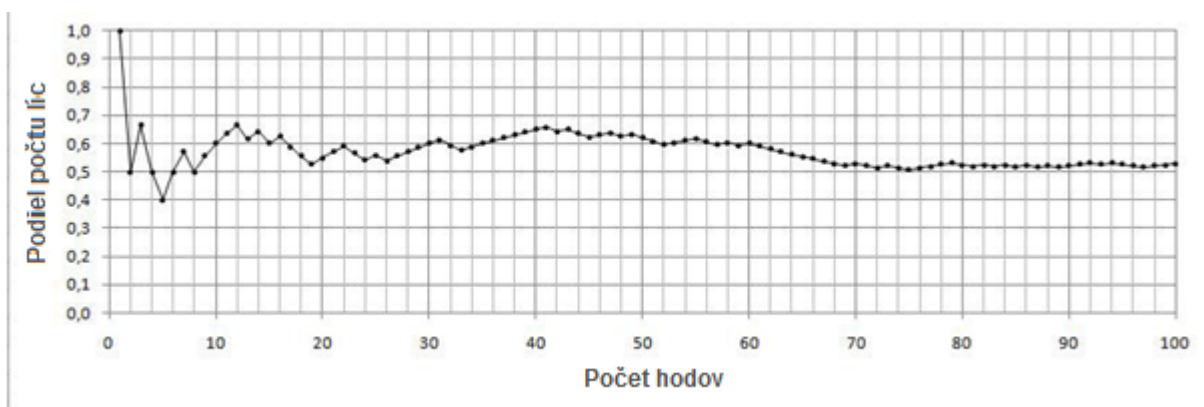


Obr. 10 Podiel líc v n hodoch ako funkcia n

Napriek tomu, že graf pozostáva z bodov v izolovaných hodnotách premennej n , môžeme si ľahko predstaviť čiary spájajúce tieto body

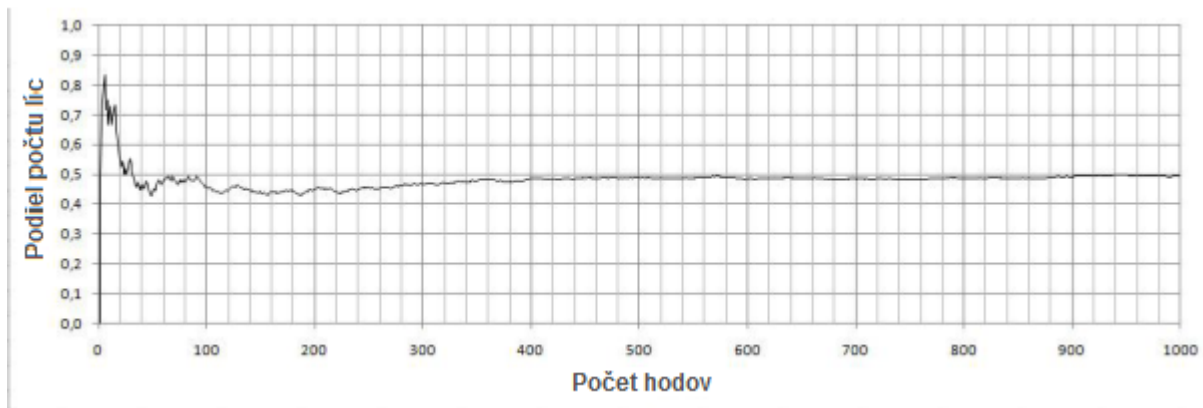


Obr. 11 Po kusoch spojitá grafika pre zlepšenie vizualizácie



Obr. 12 Stlačeníím F9 vyprodukujeme iných 100 hodov

Je možné urobiť mnoho dlhšiu sériu hodov. Stačí skopírovať nadol vzorce na obr. 8 a 9. V našej verzii máme zaplnených 220 radov. Je možné, že skôr než zaplníme všetky riadky narazíme na nedostatok pamäti. Nižšie je vidieť sériu s 1000 hodmi.



Obr. 13 Relatívna početnosť ako funkcia n pre 1000 hodov simulovanou mincou

Ak chceme simulovať 10000 hodov, nie je to žiaden problém. Stačí skopírovať vzorce nadol.



Obr. 14 Relatívna početnosť ako funkcia n pre 10000 hodov simulovanou mincou

Záver vyšie uvedených experimentov naznačujú, že limitná hodnota relatívnych početností sa rovná pravdepodobnosti nastania javu. Toto tvrdenie súvisí s tzv. zákonom veľkých čísel. Na jeho preskúmanie budeme v ďalšej časti skúmať hádzanie piatimi kockami.

Hádzanie piatimi hracími kockami



Obr. 15 Päť hracích kociek

Hodme naraz piatimi kockami a spočítajme koľkokrát padla šestka. Môže to byť ľubovoľné celé číslo od 0 do 5.

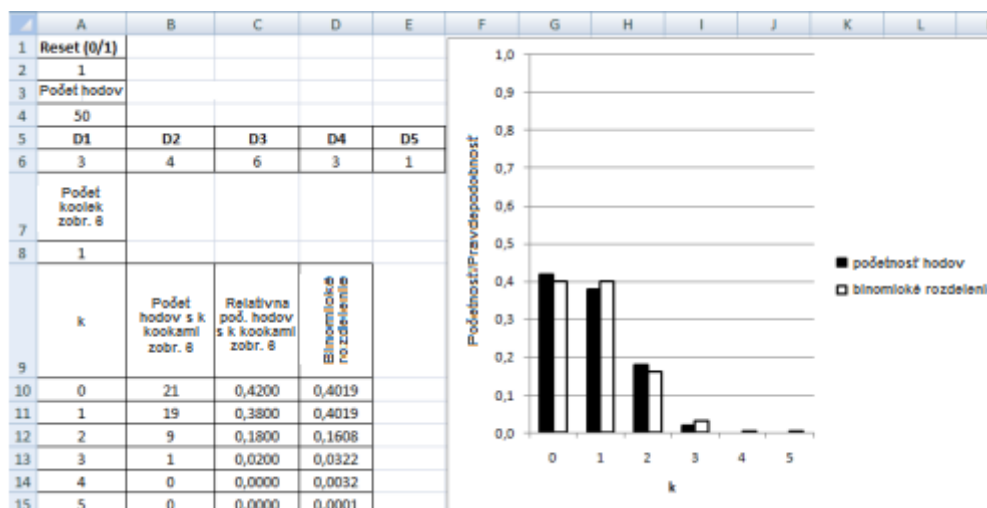
Opätovnými hodmi a sledovaním počtu šestiek, napr. po 50 hodoch, získame dáta, ktoré zapíšeme do tabuľky, ako napr. na obr. 16.

k	Počet hodov s k kockami zobraz. 6	Relatívna poč.hodov s kockami zobr. 6
0	21	0,4200
1	19	0,3800
2	9	0,1800
3	1	0,0200
4	0	0,0000
5	0	0,0000

Obr. 16 Štatistika z 50 hodov piatimi kockami

Tabuľka na obr. 16 ukazuje, že z 50 hodov v 21 prípadoch nepadla šestka. Vydelením 21 s 50 získame podiel výskytu alebo tiež takzvanú relatívnu početnosť.

Tabuľka je časťou hárku vytvoreného na dynamické sledovanie tohto procesu, keď zvyšujeme počet hodov vždy o jeden.

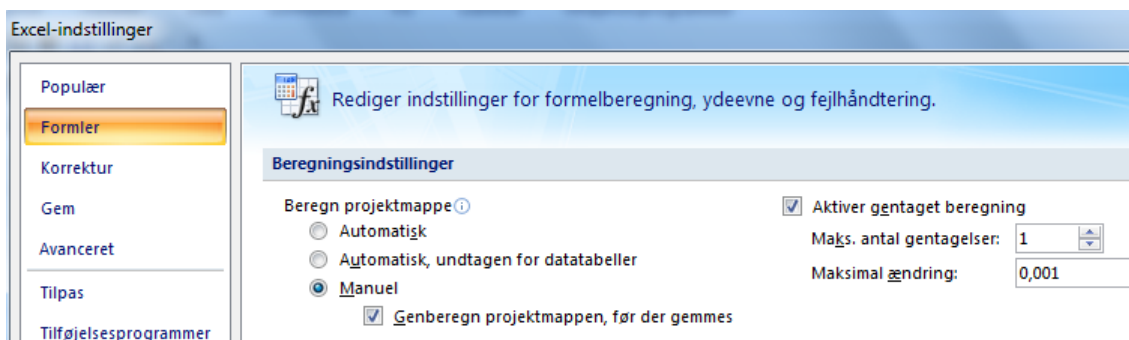


Obr. 17 Dynamická simulácia hádzania piatimi kockami. Stlačením F9 generujeme nový hod a získané dáta postupne zhromažďujeme

	A	B	C	D	E
1	Reset (0/1)				
2	1				
3	Počet hodov				
4	=HVIS(A2=1;A4+1;0)				
5	D1	D2	D3	D4	D5
6	=SLUMPMELEM(1;6)	=SLUMPMELEM(1;6)	=SLUMPMELEM(1;6)	=SLUMPMELEM(1;6)	=SLUMPMELEM(1;6)
7					
8	=HVIS(A2=1;TÆL.HVIS(A6:E6;6);**)				
9	k	Počet hodov s k kockami zobr. 8	Relatívna poč. hodov s k kockami zobr. 8	Binomické rozdelenie	
10	0	=HVIS(\$A\$2=1;HVIS(\$A\$8=A10;B10+1;B10);0)	=HVIS(\$A\$4>0;B10/\$A\$4;0)	=BINOMIALFORDELING(A10;5;1/6;0)	
11	1	=HVIS(\$A\$2=1;HVIS(\$A\$8=A11;B11+1;B11);0)	=HVIS(\$A\$4>0;B11/\$A\$4;0)	=BINOMIALFORDELING(A11;5;1/6;0)	
12	2	=HVIS(\$A\$2=1;HVIS(\$A\$8=A12;B12+1;B12);0)	=HVIS(\$A\$4>0;B12/\$A\$4;0)	=BINOMIALFORDELING(A12;5;1/6;0)	
13	3	=HVIS(\$A\$2=1;HVIS(\$A\$8=A13;B13+1;B13);0)	=HVIS(\$A\$4>0;B13/\$A\$4;0)	=BINOMIALFORDELING(A13;5;1/6;0)	
14	4	=HVIS(\$A\$2=1;HVIS(\$A\$8=A14;B14+1;B14);0)	=HVIS(\$A\$4>0;B14/\$A\$4;0)	=BINOMIALFORDELING(A14;5;1/6;0)	
15	5	=HVIS(\$A\$2=1;HVIS(\$A\$8=A15;B15+1;B15);0)	=HVIS(\$A\$4>0;B15/\$A\$4;0)	=BINOMIALFORDELING(A15;5;1/6;0)	

Obr. 18 Vzorce korešpondujúce s hárkom na obr. 17. Obrázok treba zväčšiť, ak chceme vidieť detaily. HVIS je dánsky ekvivalent funkcie IF.

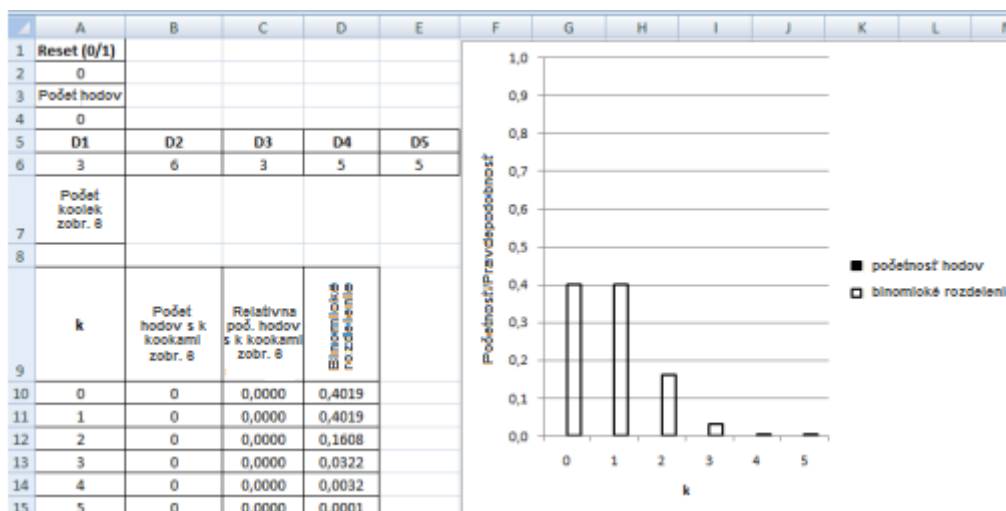
Tabuľkový kalkulátor používa kruhové odkazy, pre ktoré treba nastaviť režim výpočtu na manuálny, ako je to ukázané na obr. 19.



Obr. 19 Nastavenie vlastností pre Vzorce/Výpočty na manuálne s opakovaním po 1.

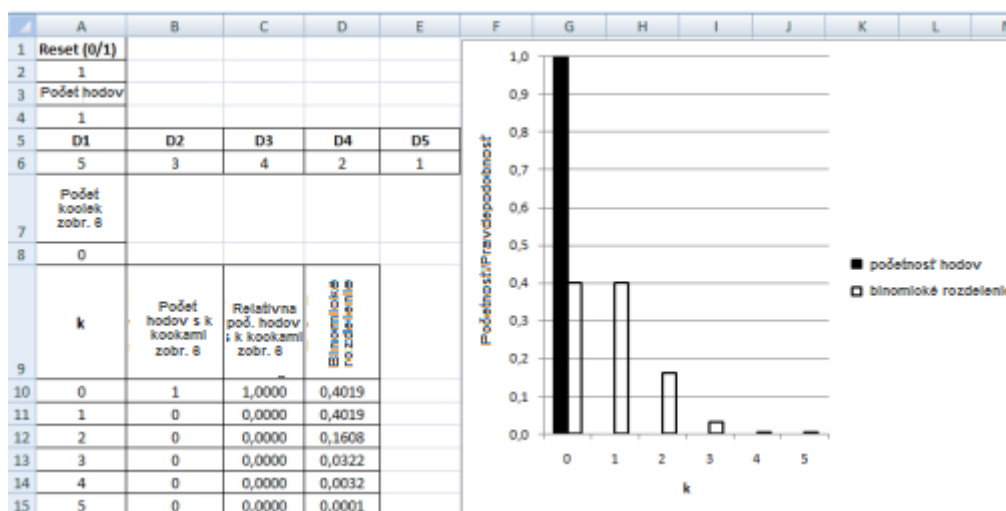
Nápoveda k háрку na obr. 17 a 18

Hárok resetujeme zapísaním 0 do bunky A2 a stlačením F9. Pre viac detailov pozri časť 4.3.2 v [1].



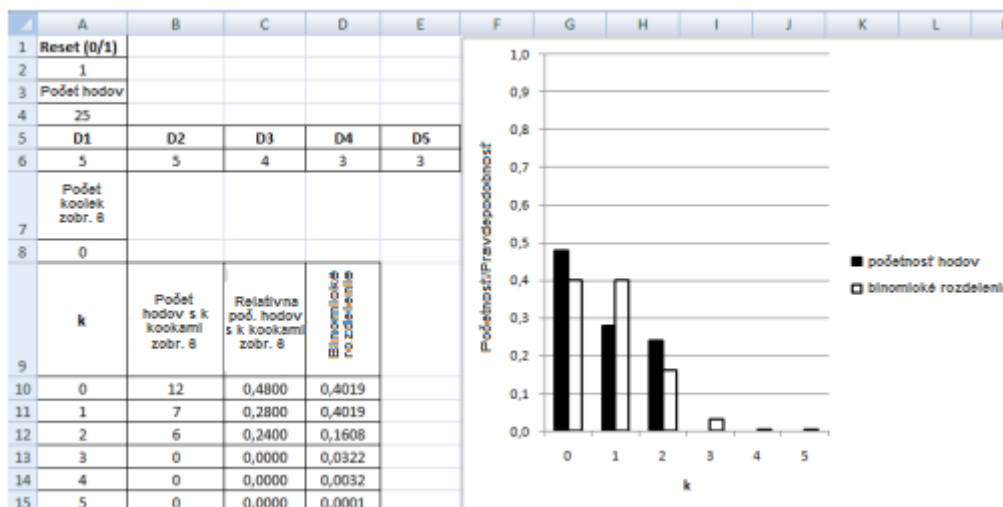
Obr. 20 Výsledok resetu háрку

Potom zapíšeme 1 do bunky A2, stlačíme F9 a máme prvý hod.



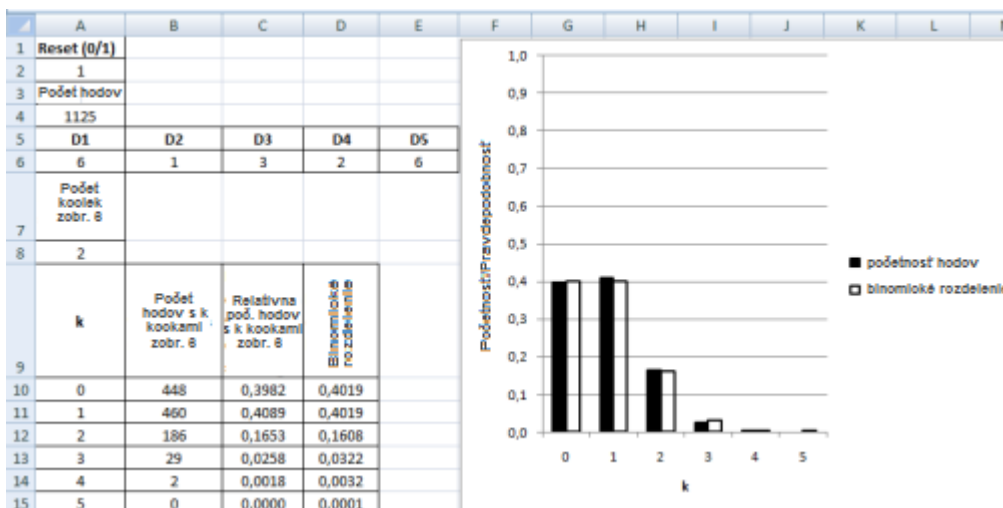
Obr. 21 Výsledok po prvom hode.

Opätovným stláčaním F9 získame ďalšie hody. Štatistika a grafika sa dynamicky aktualizujú po každom hode. Po, napríklad, 25 hodoch môžeme skončiť s podobným výsledkom ako je na obr. 22.



Obr. 22 Výsledok po 25 hodoch

Najdôležitejším zistením je, že relatívna početnosť sa stabilizuje, keď robíme viac a viac hodov. Po 1125 hodoch vyzerá graf ako na obr. 23.



Obr. 23 Výsledok po 1125 hodoch

Čierne stĺpce znázorňujú relatívnu početnosť, biele znázorňujú pravdepodobnosť počítanú pomocou tzv. binomického rozdelenia, ktoré je teoretickým modelom pre situáciu, ktorú práve vyšetrujeme.

Tak ako v časti o hádzaní mincou, aj tu zisťujeme, že pravdepodobnosť je limitným prípadom relatívnej početnosti, keď počet hodov ide do nekonečna.

Statická grafická reprezentácia dlhej série hodov

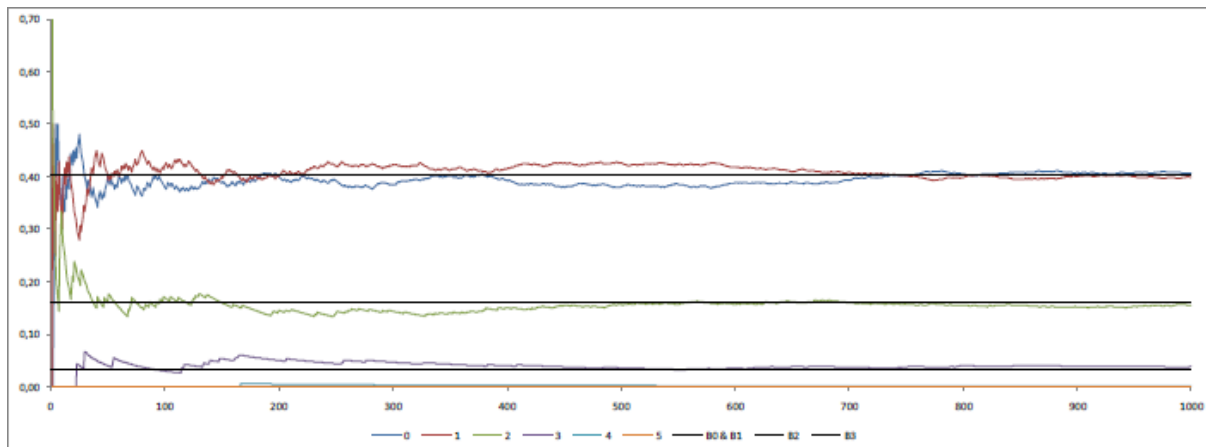
V tejto poslednej časti sa hádzaním kociek zaoberáme podobným spôsobom ako to bolo pri hádzaní mincou. Cena, ktorú za to zaplatíme je, že budeme potrebovať vyplniť omnoho viac buniek, pretože budeme musieť na hárok zapísať všetky hody. Každý hod musí mať svoj vlastný riadok.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Počet hodov	kocky					Počet šesťiek	(Number of X = k up to n)/n, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5					
2	n	D1	D2	D3	D4	D5	X	0,0000	1,0000	2,0000	3,0000	4,0000	5,0000
3	1	4	2	3	1	4	0	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	2	4	1	1	5	1	0	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5	3	6	6	3	6	2	3	0,6667	0,0000	0,0000	0,3333	0,0000	0,0000
6	4	6	2	2	5	2	1	0,5000	0,2500	0,0000	0,2500	0,0000	0,0000
7	5	5	6	1	4	6	2	0,4000	0,2000	0,2000	0,2000	0,0000	0,0000
8	6	5	2	6	6	6	3	0,3333	0,1667	0,1667	0,3333	0,0000	0,0000
9	7	5	5	6	2	5	1	0,2857	0,2857	0,1429	0,2857	0,0000	0,0000
10	8	4	3	5	2	6	1	0,2500	0,3750	0,1250	0,2500	0,0000	0,0000
11	9	6	6	1	6	4	3	0,2222	0,3333	0,1111	0,3333	0,0000	0,0000
12	10	5	5	3	5	6	1	0,2000	0,4000	0,1000	0,3000	0,0000	0,0000
13	11	1	3	3	2	5	0	0,2727	0,3636	0,0909	0,2727	0,0000	0,0000
14	12	1	3	1	1	3	0	0,3333	0,3333	0,0833	0,2500	0,0000	0,0000
15	13	5	2	4	4	6	1	0,3077	0,3846	0,0769	0,2308	0,0000	0,0000
16	14	2	6	3	1	2	1	0,2857	0,4286	0,0714	0,2143	0,0000	0,0000

Obr. 24 Prvých 16 riadkov hárku pre grafické znázornenie hodov piatimi kockami

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	
1	Počet hodov	Kocky					Počet šesťiek	(Number of X = k up to n)/n, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5				
2	n	D1	D2	D3	D4	D5	X	0	1	2	3	
3	1	=SLUMP(MELEM(1;6))	=SLUM	=SLUM	=SLUM	=SLUM	=TREL.HVIS(B3:F3;6)	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;H32)/\$A3	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;I32)/\$A3	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;J32)/\$A3	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;K32)/\$A3	
4	=A3+1	=SLUMP(MELEM(1;6))	=SLUM	=SLUM	=SLUM	=SLUM	=TREL.HVIS(B4:F4;6)	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;H32)/\$A4	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;I32)/\$A4	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;J32)/\$A4	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;K32)/\$A4	
5	=A4+1	=SLUMP(MELEM(1;6))	=SLUM	=SLUM	=SLUM	=SLUM	=TREL.HVIS(B5:F5;6)	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;H32)/\$A5	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;I32)/\$A5	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;J32)/\$A5	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;K32)/\$A5	
6	=A5+1	=SLUMP(MELEM(1;6))	=SLUM	=SLUM	=SLUM	=SLUM	=TREL.HVIS(B6:F6;6)	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;H32)/\$A6	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;I32)/\$A6	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;J32)/\$A6	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;K32)/\$A6	
7	=A6+1	=SLUMP(MELEM(1;6))	=SLUM	=SLUM	=SLUM	=SLUM	=TREL.HVIS(B7:F7;6)	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;H32)/\$A7	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;I32)/\$A7	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;J32)/\$A7	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;K32)/\$A7	
8	=A7+1	=SLUMP(MELEM(1;6))	=SLUM	=SLUM	=SLUM	=SLUM	=TREL.HVIS(B8:F8;6)	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;H32)/\$A8	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;I32)/\$A8	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;J32)/\$A8	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;K32)/\$A8	
9	=A8+1	=SLUMP(MELEM(1;6))	=SLUM	=SLUM	=SLUM	=SLUM	=TREL.HVIS(B9:F9;6)	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;H32)/\$A9	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;I32)/\$A9	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;J32)/\$A9	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;K32)/\$A9	
10	=A9+1	=SLUMP(MELEM(1;6))	=SLUM	=SLUM	=SLUM	=SLUM	=TREL.HVIS(B10:F10;6)	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;H32)/\$A10	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;I32)/\$A10	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;J32)/\$A10	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;K32)/\$A10	
11	=A10+1	=SLUMP(MELEM(1;6))	=SLUM	=SLUM	=SLUM	=SLUM	=TREL.HVIS(B11:F11;6)	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;H32)/\$A11	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;I32)/\$A11	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;J32)/\$A11	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;K32)/\$A11	
12	=A11+1	=SLUMP(MELEM(1;6))	=SLUM	=SLUM	=SLUM	=SLUM	=TREL.HVIS(B12:F12;6)	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;H32)/\$A12	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;I32)/\$A12	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;J32)/\$A12	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;K32)/\$A12	
13	=A12+1	=SLUMP(MELEM(1;6))	=SLUM	=SLUM	=SLUM	=SLUM	=TREL.HVIS(B13:F13;6)	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;H32)/\$A13	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;I32)/\$A13	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;J32)/\$A13	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;K32)/\$A13	
14	=A13+1	=SLUMP(MELEM(1;6))	=SLUM	=SLUM	=SLUM	=SLUM	=TREL.HVIS(B14:F14;6)	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;H32)/\$A14	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;I32)/\$A14	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;J32)/\$A14	=TREL.HVIS(\$G3:\$G3;K32)/\$A14	

Obr. 25 Vzorce korešpondujúce s obr. 24. Obrázok treba zväčšiť, ak chceme vidieť detaily.



Obr. 26 xy graf relatívnych početností šesťiek v hodoch s 5 kockami ako funkcia počtu hodov.

Na obr. 26 vidíme ďalší prípad dôkazu zákona veľkých čísel

Literatúra

[1] http://www.math2earth.oriw.eu/publications/13_Animation.pdf (November, 2011)

Preklad z angličtiny: Ján Beňačka